



ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.925, 517.938.5, 531.396

MSC 2010: 70F25, 37J60, 37J05

Топология и бифуркации в неголономной механике*

И. А. Бизяев, А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе развиваются топологические методы для качественного анализа поведения неголономных динамических систем. Их применение иллюстрируется на примере новой интегрируемой задачи неголономной механики, названной неголономным шарниром. Хотя эта система является неголономной, она может быть представлена в гамильтоновой форме со скобой Ли–Пуассона ранга 2. При помощи указанной скобки Ли–Пуассона в работе выполнен анализ устойчивости неподвижных точек. Кроме того, указаны все возможные типы интегральных многообразий и выполнена классификация траекторий на них.

Ключевые слова: неголономный шарнир, топология, бифуркационная диаграмма, тензорные инварианты, скобка Пуассона, устойчивость

*Перевод статьи “Topology and Bifurcations in Nonholonomic Mechanics”, опубликованной в журнале Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2015, vol. 25, no. 10, 21 pp.

Получено 27 января 2015 года

После доработки 29 апреля 2015 года

Работа И. А. Бизяева, А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания вузам.

Бизяев Иван Алексеевич

bizaev_90@mail.ru

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mmaev@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Болсинов Алексей Викторович

A.Bolsinov@lboro.ac.uk

School of Mathematics, Loughborough University

United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

Содержание

1. Введение	736
2. Реализация связи и уравнения движения	737
3. Тензорные инварианты приведенной системы	739
4. Пуассоновы структуры ранга два и интегрируемость в квадратурах	741
4.1. Общие свойства пуассоновых структур типа (3.3)	741
4.2. Приложение к анализу приведенной системы (2.5)	742
5. Качественный анализ приведенной системы	745
5.1. Неподвижные точки	745
5.2. Топологический анализ интегральных многообразий и классификация траекторий	749
6. Абсолютная динамика	756
6.1. Общие уравнения для ориентации тела и оболочки	756
6.2. Абсолютное движение тел при постоянных ω, Ω	758
Приложение. Устойчивость положений равновесия в гамильтоновых системах с пуассоновой структурой ранга два	759
Заключение	761

1. Введение

В работе рассмотрена новая интегрируемая задача неголономной механики. Физическое обоснование этой задачи содержится в [18], а сама система называется неголономным шарниром и представляет собой связку двух твердых тел, соединенных через вращающееся колесико (аналогично интерпретации Вагнера [14] задачи Суслова: в задаче Суслова одно из тел фиксировано в пространстве, в неголономном шарнире оба тела являются свободными). Более общие постановки задачи о неголономном шарнире, а также другие интегрируемые случаи указаны в работе [1].

Задача о неголономном шарнире представляет большой интерес с точки зрения исследования топологии инвариантных многообразий и исследования устойчивости критических траекторий (неподвижных точек). По сравнению с классическими задачами неголономной механики (шар Чаплыгина, динамика диска) топология данной системы весьма необычна и требует особого изучения. Отметим, что в неголономной задаче Суслова также имелись отличия от стандартной лиувиллевой ситуации, и движение на общих уровнях первых интегралов представляет собой не квазипериодические обмотки торов, а происходит по двумерному многообразию рода 2 и выше. С современным анализом задачи Суслова можно ознакомиться по [3].

Настоящая работа развивает цикл исследований авторов по топологии и устойчивости интегрируемых систем [11], пуассоновой геометрии, а также иерархии динамического поведения неголономных систем [4–7]. Особенность рассматриваемой нами интегрируемой задачи состоит в том, что механизм ее интегрируемости не является стандартным. Эта задача хотя и является неголономной, но оказывается, что она может быть представлена в гамильтоновой форме со скобкой Ли–Пуассона ранга 2. Принято считать, что такие системы обладают следующими свойствами:

- интегрируемость по Лиувиллю, то есть симплектические листы двумерны и для интегрируемости достаточно одного первого интеграла — гамильтониана;



- при ограничении на симплектический лист получается гамильтонова система с одной степенью свободы, траектории которой совпадают с линиями уровня гамильтониана, а траектории с более сложной структурой типа иррациональных обмоток тора отсутствуют;
- ограниченные траектории системы замкнуты, за исключением тех, которые асимптотически приближаются к положению равновесия.

Известно, что отсутствие глобально определенных функций Казимира для скобок ранга 2 может приводить к неинтегрируемости и даже к хаосу. В рассматриваемой нами задаче ситуация промежуточная. Хотя такого набора глобальных функций Казимира не существует, система интегрируется в квадратурах. Однако описанная картина поведения траекторий уже не реализуется. Отметим, что в работе [3] указан другой класс скобок ранга 2, который уже не приводит к интегрируемости. Мы определяем специальный класс скобок ранга 2, для которых справедливы утверждения об интегрируемости. Отметим, что этот механизм интегрирования ранее не рассматривался, а классическая теорема Лиувилля в данном случае не применима.

В данной работе мы приводим общие результаты об устойчивости неподвижных точек, используя скобки Пуассона ранга 2 (общий критерий приведен в приложении). Построены графики областей устойчивости для рассматриваемой задачи. Выполнен топологический анализ интегральных многообразий и приведена классификация траекторий на них. Построена трехмерная бифуркационная диаграмма в пространстве значений первых интегралов. В последнем разделе статьи обсуждается абсолютная динамика шарнира, связанная с описанием ориентации внутреннего тела и оболочки. Показано, что для некоторых особо замечательных движений, представляющих собой неподвижные точки редуцированной системы, связка тел совершает в абсолютном пространстве 2-периодическое движение, а в фазовом пространстве неособые траектории представляют собой периодические и квазипериодические обмотки двумерных торов.

Несмотря на то, что в работе рассматривается конкретная задача о неголономном шарнире, использованные в ней методы исследования имеют весьма общий характер. Такой подход, ведущий от задач к методам, к сожалению, мало представлен в современной литературе по неголономным системам. В некоторых исследованиях формулируются несколько странные результаты относительно общих неголономных систем, а в качестве примеров обычно выступают простейшие задачи (типа качения неоднородного шара), для которых и так все ясно. (Это замечание касается вопросов редукции, существования линейных интегралов, неголономных интеграторов и пр.) Невозможно развивать неголономную механику, не рассматривая все более сложные задачи (для этого в работах [4–7] введен специальный термин *иерархии динамического поведения*) и отрабатывая на них специальные методы исследования таких систем. Данная задача демонстрирует совершенно новые топологические и динамические особенности, которые не встречались ранее, благодаря чему удалось понять новые аспекты поведения неголономных систем, привлекая методы гамильтоновой механики и пуассоновой геометрии.

2. Реализация связи и уравнения движения

Г. К. Суслов (см. [17, с. 325]) рассмотрел систему, состоящую из двух тел, каждое из которых вращается вокруг неподвижной точки, соединенных между собой таким образом, чтобы выполнялась (неголономная) связь

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{E}, \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad (2.1)$$

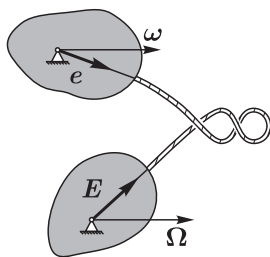


Рис. 1

где ω , Ω — векторы угловых скоростей тел, а e , E — единичные векторы, жестко связанные с каждым из тел. Он предполагал, что данную связь можно реализовать с помощью «весьма длинной, гибкой нити, не поддающейся кручению» (рис. 1). Такая реализация является некорректной, так как известно, что поворот нити на ненулевой угол может возникнуть не за счет ее скручивания, а за счет изменения формы [3, 9]. Корректная (с теоретической точки зрения) реализация связи подобного типа для одного тела с неподвижной точкой была предложена В. Вагнером [14]. Позже аналогичная реализация также указана в [18] и была названа авторами *неголономным шарниром*.

В этой работе рассмотрим задачу о *свободном движении* связки двух тел, соединенных неголономным шарниром. Внешнее тело представляет собой сферическую оболочку, внутри которой движется твердое тело, соединенное с оболочкой при помощи двух колесиков с острыми краями таким образом, что исключаются относительные повороты вокруг вектора e , фиксированного во внутреннем теле (рис. 2):

$$(\omega - \Omega, e) = 0, \quad (2.2)$$

где Ω , ω — угловые скорости оболочки и внутреннего тела соответственно. Для того чтобы исключить относительные повороты тел только вдоль одного направления, точки соприкосновения колесиков с внутренней поверхностью оболочки должны лежать на одной прямой, проходящей через центр сферы C (рис. 2). Возникающая связь (2.2) является частным случаем связи Сулова (2.1). Кроме того будем полагать, что центры масс оболочки и тела совпадают и находятся в геометрическом центре сферы C .

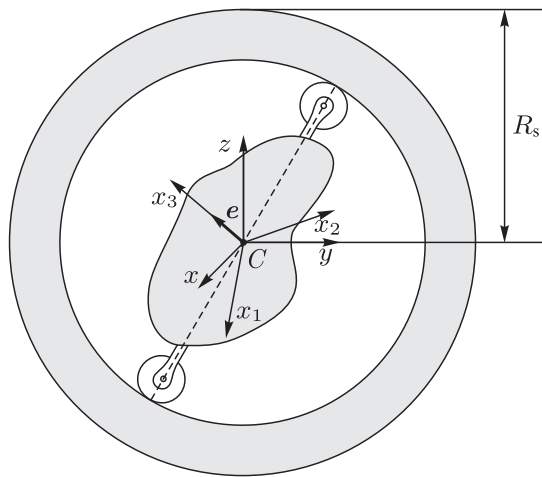


Рис. 2. Динамически симметричная сферическая оболочка с неголономным шарниром внутри.

Выберем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$, жестко связанную с внутренним телом таким образом, что $Cx_3 \parallel e$, тогда уравнения связи примет вид

$$f_0 = \omega_3 - \Omega_3 = 0 \quad (\text{связь Сулова}). \quad (2.3)$$

Будем полагать, что тензор инерции оболочки — шаровой $I_s E$ (индекс s здесь и далее обозначает оболочку — shell), и ограничимся в данной работе лишь случаем, когда вектор e

совпадает с направлением одной из главных осей инерции внутреннего тела. Кинетическая энергия всей системы представляется в форме

$$T = \frac{1}{2}(I_s \Omega^2 + (\omega, \mathbf{I}\omega)),$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции внутреннего тела (здесь мы считаем, что оси $Cx_1x_2x_3$ — главные оси инерции).

Уравнения движения в подвижной системе координат, жестко связанной с внутренним телом, можно записать, пользуясь формализмом работы [4], так что в явном виде получим

$$I_s \dot{\Omega} + I_s \omega \times \Omega = -\lambda_0 e, \quad \mathbf{I} \dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I} \omega = \lambda_0 e, \quad (2.4)$$

где λ_0 — неопределенный множитель, $e = (0, 0, 1)$. Исключая λ_0 при помощи уравнения связи (2.3), после упрощений получим следующую замкнутую систему:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \omega_3(\Omega_2 - \omega_2), & \dot{\Omega}_2 &= \omega_3(\omega_1 - \Omega_1), \\ I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, & I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ (I_s + I_3)\dot{\omega}_3 &= I_s(\Omega_1\omega_2 - \Omega_2\omega_1) + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эти уравнения необходимо дополнить кинематическими соотношениями, позволяющими по заданным угловым скоростям $\omega(t)$, $\Omega(t)$ определить ориентацию оболочки и внутреннего тела. Для краткости будем называть это реконструкцией *абсолютной динамики*. Более подробно этот вопрос изложен в разделе 6. Уравнения (2.5) мы будем называть *приведенной (редуцированной) системой* и остановимся более подробно на их исследовании.

Заметим, что поскольку вся система не находится под действием каких-либо полей, ее центр масс (совпадающий с геометрическим центром оболочки) можно считать неподвижным относительно некоторой инерциальной системы координат.

3. Тензорные инварианты приведенной системы

Для того чтобы проанализировать динамику данной системы, рассмотрим сначала, какими тензорными инвариантами [4–7] она обладает. Во-первых, система (2.5) допускает три квадратичных первых интеграла:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}I_s(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + (I_3 + I_s)\omega_3^2), \\ C_1 &= I_1(I_1 - I_3)\omega_1^2 + I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2, & C_2 &= (I_1\omega_1 - I_3\Omega_1)^2 + (I_2\omega_2 - I_3\Omega_2)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первый из интегралов — это кинетическая энергия системы, и его сохранение следует из общих теорем динамики [4, 15], а два других интеграла легко отыскать, если заметить, что первые четыре уравнения системы (2.5) после деления на ω_3 образуют замкнутую линейную систему.

Кроме того, уравнения (2.5) сохраняют стандартную инвариантную меру

$$\mu = d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Оказывается, что уравнения (2.5) сохраняют еще один тензорный инвариант — пуассонову структуру — и, как следствие, могут быть записаны в гамильтоновой форме.

Предложение. Уравнения движения (2.5) представляются в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_i &= \{\omega_i, H\}, \quad \dot{\Omega}_j = \{\Omega_j, H\}, \\ H &= \frac{1}{2}\omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_s(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{I_s + I_3},\end{aligned}\quad (3.2)$$

с вырожденной скобкой Ли – Пуассона ранга два

$$\begin{aligned}\{\Omega_1, \omega_3\} &= \Omega_2 - \omega_2, \quad \{\Omega_2, \omega_3\} = \omega_1 - \Omega_1, \\ \{\omega_1, \omega_3\} &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2, \quad \{\omega_2, \omega_3\} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Доказательство — прямая проверка уравнений и тождества Якоби. ■

В переменных $\mathbf{z} = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ пуассонову структуру (3.3) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_2 - \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\Omega_1 - \omega_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_1 - I_3}{I_2}\omega_1 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где звездочками мы обозначили ненулевые элементы матрицы, получающиеся из условия кососимметричности $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$.

Как легко проверить, интегралы C_1, C_2 (3.1) являются функциями Казимира этой пуассоновой структуры; третья функция Казимира в общем случае оказывается глобально не определена.

Как будет показано ниже, гамильтоново представление (3.2), (3.3) в данном случае является фундаментальным свойством приведенной системы (2.5), и с его помощью можно не только получить интегралы движения, инвариантную меру, но и проинтегрировать систему в квадратурах и существенно продвинуться в ее качественном анализе.

Замечание. Отметим, что согласно работе [10], уравнения движения (2.5) после замены времени $d\tau = \omega_3 dt$ представляются в гамильтоновой форме с гамильтонианом H и скобкой Пуассона \mathbf{J} ранга 4:

$$\begin{aligned}\{\Omega_1, \Omega_2\} &= I_s^{-1}, \quad \{\omega_2, \Omega_1\} = I_2^{-1}, \quad \{\Omega_2, \omega_1\} = I_1^{-1}, \\ \{\omega_1, \omega_3\} &= \frac{I_s\Omega_2 + I_2\omega_2}{I_1(I_s + I_3)\omega_3}, \quad \{\omega_2, \omega_1\} = \frac{I_3}{I_1 I_2}, \quad \{\omega_3, \omega_2\} = \frac{I_s\Omega_1 + I_1\omega_1}{I_2(I_s + I_3)\omega_3}.\end{aligned}$$

Функция Казимира \mathbf{J} имеет вид

$$(I_s\Omega_1 + I_1\omega_1)^2 + (I_s\Omega_2 + I_2\omega_2)^2 + (I_s + I_3)^2\omega_3^2.$$

4. Пуассоновы структуры ранга два и интегрируемость в квадратурах

4.1. Общие свойства пуассоновых структур типа (3.3)

Линейные пуассоновы структуры типа (3.3) интересны во многих отношениях, они возникали в различных контекстах и исследовались, например, в работах [2, 8, 13, 16]. Главное их свойство заключается в том, что они имеют ранг два¹. Их симплектические листы двумерны, гамильтоновы системы (после ограничения на симплектический лист) имеют одну степень свободы и, на первый взгляд, должны быть автоматически интегрируемы по Лиувиллю при любом выборе гамильтониана. Проблема, однако, заключается в том, что не все функции Казимира таких скобок Пуассона можно определить глобально. Здесь мы обсудим этот эффект подробнее и заодно укажем некоторые общие свойства скобок (3.3).

Прежде всего дадим описание 5-мерной алгебры Ли \mathfrak{g} , отвечающей скобке (3.3), которое будет удобным для дальнейших исследований. Легко видеть, что \mathfrak{g} может быть записана как полупрямая сумма одномерной алгебры Ли и четырехмерного пространства \mathbb{R}^4 , которое рассматривается как коммутативная подалгебра. Матричное представление этой алгебры Ли таково:

$$\begin{pmatrix} & x_1 & & & \\ & x_2 & & & \\ \mathbf{A} \cdot t & x_3 & & & \\ & x_4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = (a_i^j)$ — некоторая фиксированная (4×4) -матрица, а x_1, x_2, x_3, x_4, t рассматриваются как независимые параметры. В нашем конкретном случае переменные $\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ отвечают (говоря точнее, двойственны) параметрам x_1, x_2, x_3, x_4, t , а матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{I_1 - I_3}{I_2} \\ 1 & 0 & \frac{I_3 - I_2}{I_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Сделаем теперь несколько общих комментариев относительно линейных скобок Пуассона этого типа. Матрицу \mathbf{A} мы будем пока предполагать совершенно произвольной и, соответственно, вместо (x_1, \dots, x_4) будем рассматривать n -мерный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. В следующем утверждении суммированы основные свойства алгебр Ли рассматриваемого типа и связанных с ними скобок Пуассона, которые могут быть полезны для приложений (см. также [16]).

¹В недавней работе А. Ю. Коняева [16] описаны все линейные скобки Пуассона ранга два. Вопрос о классификации таких скобок был поставлен в [12], там же был сформулирован следующий вопрос: «Существуют ли гамильтоновы системы с такими скобками, не допускающие глобально определенных независимых $n - 1$ интегралов?» Положительный ответ на этот вопрос как раз и дает система, изучаемая в данной работе.

Предложение 1. Пусть $\mathbf{A} = (a_i^j)$ — ненулевая матрица размера $n \times n$. Рассмотрим матричную $(n+1)$ -мерную алгебру Ли вида

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot t & \mathbf{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Двойственным координатам x_1, \dots, x_n, t на \mathfrak{g} координаты на двойственном пространстве \mathfrak{g}^* обозначим через y_1, \dots, y_n, τ .

- 1°. Алгебры Ли этого типа, отвечающие сопряженным друг другу матрицам \mathbf{A} и $\mathbf{A}' = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}$, изоморфны.
- 2°. Скобка Пуассона–Ли на \mathfrak{g}^* имеет ранг 2.
- 3°. Алгебра Ли \mathfrak{g} унимодулярна тогда и только тогда, когда $\text{Tr } \mathbf{A} = 0$. В этом случае всякое гамильтоново векторное поле на \mathfrak{g}^* обладает естественной инвариантной мерой $dy_1 \dots dy_n d\tau$.
- 4°. Тензор Пуассона \mathbf{J} , отвечающий алгебре Ли \mathfrak{g} , может быть представлен в виде разложимого бивектора $\boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\xi}'$, где $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}'$ — гладкие векторные поля на \mathfrak{g}^* , а именно: $\boldsymbol{\eta} = \partial_\tau$ — постоянное векторное поле, а $\boldsymbol{\xi}'$ — естественное продолжение на $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n(\mathbf{y}) \times \mathbb{R}^1(\tau)$ линейного векторного поля $\boldsymbol{\xi}$ на $\mathbb{R}^n(\mathbf{y})$, которое в координатах y_1, \dots, y_n имеет вид $\sum a_i^j y_i \partial_{y_j}$. В матричном виде тензор Пуассона может быть записан так:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \\ -\mathbf{y}^\top \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

- 5°. Функции Казимира пуассоновой структуры \mathbf{J} зависят только от \mathbf{y} и являются первыми интегралами векторного поля $\boldsymbol{\xi}$.
- 6°. Симплектические листы (размерности 2) пуассоновой структуры \mathbf{J} являются прямыми произведениями вида $\gamma \times \mathbb{R}(\tau)$, где $\gamma \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{y})$ — траектория векторного поля $\boldsymbol{\xi}$.

Таким образом, утверждения 5° и 6° показывают, что функции Казимира (а значит, и структура симплектических листов) зависят от свойств решений линейного дифференциального уравнения вида $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$. Эти свойства, в свою очередь, зависят от жордановой нормальной формы матрицы \mathbf{A} . Мы не будем останавливаться на общем случае подробнее, а вернемся к нашей конкретной матрице (4.1).

4.2. Приложение к анализу приведенной системы (2.5)

Прежде всего заметим, что $\text{Tr } \mathbf{A} = 0$, поэтому любая гамильтонова относительно скобки (3.3) система имеет регулярную инвариантную меру, что сразу запрещает существование аттракторов и предельных циклов как в целом на 5-мерном фазовом пространстве, так и на любых неособых многообразиях уровня первых интегралов.

Заметим далее, что в силу утверждения 1° (см. предложение 1) исходную матрицу (4.1) можно заменить на ее жорданову форму. Легко проверяется, что собственные значения этой матрицы имеют вид $\pm\sqrt{-1}$ и $\pm\sqrt{-\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2}}$. В зависимости от знака выражения

под корнем два последних собственных значения будут либо чисто мнимыми, либо вещественными. Эти два случая существенно различаются между собой по свойствам симплектических листов и функций Казимира. Обозначим через k^2 модуль выражения под корнем. Тогда при помощи подходящей замены переменных матрицу \mathbf{A} можно привести к одному из следующих двух блочно-диагональных видов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & k & & \\ -k & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & k & & \\ k & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Будем по-прежнему обозначать координаты, в которых матрица \mathbf{A} имеет указанный вид, через y_1, y_2, y_3, y_4 .

Разберем сначала первый случай, для него переменные y имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= I_1 \omega_1 - I_3 \Omega_1, & y_2 &= I_2 \omega_2 - I_3 \Omega_2, \\ y_3 &= \sqrt{I_1(I_1 - I_3)} \omega_1, & y_4 &= \sqrt{I_2(I_2 - I_3)} \omega_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Начнем с описания функций Казимира и симплектических листов. Согласно утверждениям 5° и 6° предложения 1, нам достаточно проанализировать первые интегралы и интегральные траектории линейного дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$. В данном случае динамика этой системы совсем простая, ее можно понимать как композицию двух равномерных вращений в плоскостях (y_1, y_2) и (y_3, y_4) с угловыми скоростями 1 и k соответственно.

Отсюда сразу следует, что скобка Пуассона имеет две «хорошие» квадратичные функции Казимира:

$$C_1 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{и} \quad C_2 = y_3^2 + y_4^2.$$

Зафиксировав их значения, мы получим в пространстве $\mathbb{R}^4(\mathbf{y})$ двумерный тор. Если дополнительно ввести две угловые переменные $\varphi_1 = \arctg \frac{y_2}{y_1}$ и $\varphi_2 = \arctg \frac{y_4}{y_3}$ и рассмотреть $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$ как систему координат на \mathbb{R}^4 (типа полярных), то линейное векторное поле $\xi(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$, задаваемое оператором \mathbf{A} , будет иметь совсем простой вид:

$$\xi = (0, 0, k, 1).$$

При иррациональном k траектория этого векторного поля является всюду плотной обмоткой на торе и поэтому не допускает еще одного глобального интеграла (который, как было сказано выше, был бы функцией Казимира рассматриваемой скобки). Однако локальный интеграл существует и может быть записан в виде

$$C_3 = \varphi_1 - k\varphi_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полезно отметить, что на всех торах вида $\{C_1 = \text{const}_1, C_2 = \text{const}_2\}$ иррациональная обмотка одна и та же. Иными словами, число k , входящее в третий интеграл C_3 , не зависит от значений интегралов C_1 и C_2 , а является константой, определяемой тензором Пуассона. Ее инвариантный смысл состоит в том, что k — это отношение собственных значений матрицы \mathbf{A} вида (4.1) (или, в канонической записи, вида (4.3)). Для более общих матриц \mathbf{A} ситуация аналогична: отношения собственных значений играют важную роль и входят в явные формулы для интегралов в качестве параметров.

Информации, полученной выше, вполне достаточно для того, чтобы проинтегрировать в квадратурах любую гамильтонову систему на \mathfrak{g}^* .

Предложение 2. Рассмотрим произвольную гамильтонову систему относительно пуассоновой структуры (4.2), отвечающей матрице \mathbf{A} вида (4.3). Тогда эта система интегрируется в квадратурах.

Доказательство. Принципиальная возможность интегрирования системы в квадратурах сомнения не вызывает, поскольку мы знаем явные формулы для функций Казимира и, следовательно, можем ограничить систему на симплектический лист, после чего остается ее проинтегрировать как гамильтонову систему с одной степенью свободы.

Рассмотрим произвольный гамильтониан H на \mathbb{R}^5 . Соответствующая гамильтонова система в переменных $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2, \tau$ запишется в виде

$$\dot{C}_1 = 0, \quad \dot{C}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = kF, \quad \dot{\varphi}_2 = F, \quad \dot{\tau} = G, \quad (4.5)$$

где F и G — некоторые функции. Если теперь сделать замену времени $dt = F dt'$, то уравнения примут вид

$$\dot{C}_1 = 0, \quad \dot{C}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = k, \quad \dot{\varphi}_2 = 1, \quad \dot{\tau} = \tilde{G},$$

где $\tilde{G} = \frac{G}{F}$ — некоторая функция от всех переменных. Заметим наконец, что гамильтониан H системы является первым интегралом, что позволяет выразить переменную τ через $H, C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$. Тем самым уравнения движения принимают вид

$$\dot{\varphi}_1 = 1, \quad \dot{\varphi}_2 = k, \quad \dot{\tau} = \tilde{G}(\varphi_1, \varphi_2; C_1, C_2, H) \quad (4.6)$$

и сразу интегрируются $\tau(t') = \int \tilde{G}(t', kt'; C_1, C_2, H) dt'$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для рассматриваемого в следующих разделах гамильтониана (3.2)

$$F = \tau, \quad (4.7)$$

$$G = \frac{I_s \sqrt{c_2}}{I_3(I_s + I_3)} \left(\sqrt{\frac{c_1}{I_1(I_1 - I_3)}} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sqrt{\frac{c_1}{I_2(I_2 - I_3)}} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) + c_1 \frac{(I_1 - I_2)}{2k \det \mathbf{I}} \sin(2\varphi_1).$$

Фактически для такого явного интегрирования мы использовали двумерность симплектических листов. В стандартной ситуации, когда симплектические листы являются замкнутыми подмногообразиями, явно задающимися функциями Казимира, двумерность означает, что мы интегрируем гамильтонову систему с одной степенью свободы. Здесь мы тоже неявно воспользовались существованием локального интеграла C_3 .

Несуществование глобальной функции Казимира или, точнее, тот факт, что симплектический лист не является «хорошо вложенным подмногообразием», а представляет собой прямое произведение иррациональной обмотки тора на \mathbb{R} , приводит к тому, что глобальная динамика системы существенно отличается от того, что мы привыкли видеть в системах с одной степенью свободы. Одним из «общепризнанных» свойств таких систем является следующее. Если гамильтониан системы положительно определен (или, более общим образом, его уровни $\{H = \text{const}\}$ компактны), то в случае одной степени свободы почти все траектории системы замкнуты. В данном случае это не так. Открытая область фазового пространства оказывается заполненной незамкнутыми траекториями типа иррациональных обмоток. Подробный топологический анализ системы приведен в следующих параграфах.

5. Качественный анализ приведенной системы

5.1. Неподвижные точки

Прежде всего рассмотрим положения равновесия системы (2.5) и проанализируем их устойчивость. В исходных переменных $z = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ множество неподвижных точек задается следующим образом:

$$\mathcal{M}_*^3 = \{\omega_3 = 0, I_s(\Omega_1\omega_2 - \Omega_2\omega_1) + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0\}. \quad (5.1)$$

Для более обозримого и наглядного представления результатов оказывается удобнее проанализировать неподвижные точки данной системы не в фазовом пространстве в целом, а на отдельных поверхностях уровня, где решение представляется в квадратурах (см. раздел 4.2):

$$\mathcal{M}_{c,h} = \{C_1(z) = c_1, C_2(z) = c_2, H(z) = h\};$$

здесь H, C_1, C_2 определены соотношениями (3.2), (3.1). При этом на многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$ положения равновесия представляют собой изолированные точки. Выделяются два случая, которые требуют отдельного рассмотрения, поскольку различаются свойствами функции C_1 :

- 1) $(I_1 - I_3)(I_2 - I_3) > 0$, функция Казимира C_1 является знакоопределенной функцией,
- 2) $(I_1 - I_3)(I_2 - I_3) < 0$, функция Казимира C_1 является знакопеременной функцией.

Подчеркнем, что указанное различие между этими случаями объясняется тем, что соответствующие скобки Пуассона существенным образом не изоморфны, то есть отличие динамического поведения системы обусловлено в данном случае скобкой Пуассона (или, что то же самое, соответствующей 5-мерной алгеброй Ли).

Всюду в дальнейшем при анализе системы (без ограничения общности) будем полагать, что оси Cx_1 и Cx_2 выбраны таким образом, что выполнено неравенство $I_2 < I_1$. При этом, как легко видеть, функция C_1 знакопеременная, если величина I_3 удовлетворяет неравенству $I_2 < I_3 < I_1$.

$(I_1 - I_3)(I_2 - I_3) > 0$. Переход к полярным координатам на многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$ из предыдущего раздела имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{c_1}{I_1(I_1 - I_3)}} \sin \varphi_1, & \omega_2 &= \sqrt{\frac{c_1}{I_2(I_2 - I_3)}} \cos \varphi_1, \\ \Omega_1 &= \sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_1 - I_3}} \frac{\sin \varphi_1}{I_3} - \sqrt{c_2} \frac{\sin \varphi_2}{I_3}, & \Omega_2 &= \sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_2 - I_3}} \frac{\cos \varphi_1}{I_3} - \sqrt{c_2} \frac{\cos \varphi_2}{I_3}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$. В этом случае неподвижные точки на многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} G &= 0, & Q &= hI_3^2(I_3 + I_s), \\ G &= \frac{I_s \sqrt{c_2}}{I_3(I_s + I_3)} \left(\sqrt{\frac{c_1}{I_1(I_1 - I_3)}} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sqrt{\frac{c_1}{I_2(I_2 - I_3)}} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) + \\ &\quad + c_1 \frac{(I_1 - I_2)}{2k \det \mathbf{I}} \sin(2\varphi_1), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$Q = \frac{I_s c_2}{2} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{I_s I_1 + I_3^2}{I_1 - I_3} \sin^2 \varphi_1 + \frac{I_s I_2 + I_3^2}{I_2 - I_3} \cos^2 \varphi_1 \right) - \\ - I_s \sqrt{c_2} \left(\sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_1 - I_3}} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_2 - I_3}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right).$$

Первое из этих уравнений удобно переписать в следующей форме:

$$\frac{2I_s}{(I_s + I_3)} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} - g(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \\ g(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\varphi_1}{\sqrt{I_1(I_1 - I_3)} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sqrt{I_2(I_2 - I_3)} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Отсюда, с учетом того, что функция $H(\mathbf{z})$ положительно определена, получим следующее утверждение:

если координаты точки (φ_1, φ_2) удовлетворяют неравенству $g(\varphi_1, \varphi_2) > 0$, то существуют положительные величины c_1, c_2, h , которые удовлетворяют уравнениям (5.3), то есть на данном многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$ точка (φ_1, φ_2) задает положение равновесия системы (2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Во многих случаях более содержательным является вопрос о количестве и устойчивости неподвижных точек на заданном многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$ (то есть при фиксированных значениях первых интегралов c_1, c_2, h). Здесь мы не будем рассматривать эту проблему, заметим лишь, что, пользуясь хорошо известной формулой

$$\sum_{\text{крит. точки}} \text{ind} = \chi(\mathcal{M}_{c,h}^2),$$

где χ — эйлерова характеристика двумерной поверхности, для нашего случая получим

$$\sum_{\text{st}} - \sum_{\text{un}} = 2 - 2g,$$

где $\sum_{\text{st}}, \sum_{\text{un}}$ — суммы устойчивых и неустойчивых неподвижных точек, а g — число ручек поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$ (то есть ее род).

Для исследования устойчивости неподвижных точек воспользуемся скобкой Пуассона (3.3). Согласно общему критерию, полученному в приложении, устойчивость неподвижной точки \mathbf{z}_0 определяется знаком функции

$$\mu_h(\mathbf{z}_0) = \det \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}(H)) & \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}(H)) \\ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}(H)) & \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}(H)) \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

где $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ — векторные поля, заданные локально (в окрестности неподвижной точки \mathbf{z}_0) разложением тензора Пуассона $\mathbf{J} = \boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}$.

В данном случае, как было показано в предыдущем разделе, это разложение существует глобально, а поля $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ в переменных $\mathbf{z} = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеют вид

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\Omega_2 - \omega_2, \omega_1 - \Omega_1, \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2, \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1, 0 \right), \quad \boldsymbol{\eta} = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Вычисляя величину (5.4) и ограничивая ее на многообразии $\mathcal{M}_{c,h}$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_h(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\det \mathbf{I}}{I_s \sqrt{c_1 c_2}} \mu_h(\varphi_1, \varphi_2) = & \frac{\sqrt{I_1}(I_2 \sin^2 \varphi_1 - (I_1 - I_3) \cos^2 \varphi_1)}{\sqrt{I_1 - I_3}} \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} + \\ & + \frac{\sqrt{I_2}(I_1 \cos^2 \varphi_1 - (I_2 - I_3) \sin^2 \varphi_1)}{\sqrt{I_2 - I_3}} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}.\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ — неподвижная точка системы (2.5) на интегральной поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$, тогда

- 1) точка φ^* устойчива (по Ляпунову), если $\tilde{\mu}_h(\varphi_1^*, \varphi_2^*) > 0$,
- 2) точка φ^* неустойчива, если $\tilde{\mu}_h(\varphi_1^*, \varphi_2^*) < 0$.

Вопрос устойчивости неподвижных точек φ^* , в которых $\tilde{\mu}_h(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0$, требует дополнительного исследования.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Здесь и далее устойчивость рассматривается по отношению к возмущению переменных $(\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

При фиксированных моментах инерции области устойчивых и неустойчивых неподвижных точек приведены на рисунке 3.

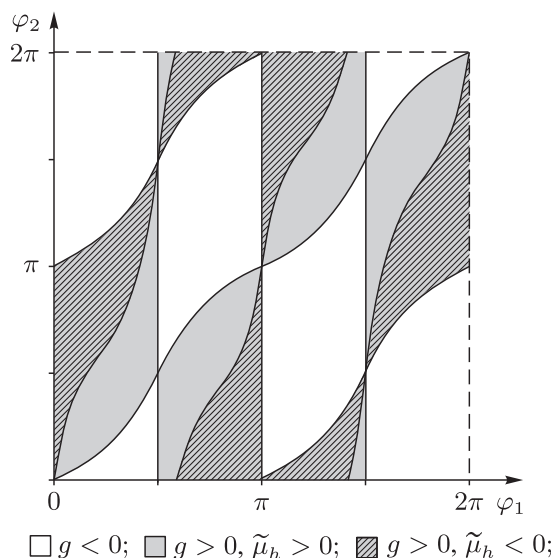


Рис. 3. Области устойчивых (выделены серым) и неустойчивых (заштрихованы) состояний равновесия ($I_1 = 5.2$, $I_2 = 4.3$, $I_3 = 3.9$, $I_s = 3.6$).

Если внутреннее тело динамически симметрично, то есть $I_1 = I_2 \neq I_3$, первое уравнение (5.3) существенно упрощается и может быть представлено в форме

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0,$$

отсюда имеем два решения:

$$\varphi_2 = \varphi_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi.$$

При этом первое решение всегда устойчиво ($\tilde{\mu}_h > 0$), а второе решение всегда неустойчиво ($\tilde{\mu}_h < 0$).

$(I_1 - I_3)(I_2 - I_3) < 0$. В этом случае переход к локальным координатам имеет вид

$$\begin{aligned} \text{если } c_1 > 0, \text{ то } \omega_1 &= \pm \sqrt{\frac{c_1}{I_1(I_1 - I_3)}} \cosh \varphi_1^\pm, \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{c_1}{I_2(I_3 - I_2)}} \sinh \varphi_1^\pm, \\ \Omega_1 &= \pm \sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_1 - I_3}} \frac{\cosh \varphi_1^\pm}{I_3} - \frac{\sqrt{c_2}}{I_3} \sin \varphi_2, \quad \Omega_2 = -\sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_3 - I_2}} \frac{\sinh \varphi_1^\pm}{I_3} - \frac{\sqrt{c_2}}{I_3} \cos \varphi_2, \\ \text{если } c_1 < 0, \text{ то } \omega_1 &= -\sqrt{\frac{c_1}{I_1(I_3 - I_1)}} \sinh \varphi_1^\pm, \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{c_1}{I_2(I_2 - I_3)}} \cosh \varphi_1^\pm, \\ \Omega_1 &= -\sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_3 - I_1}} \frac{\sinh \varphi_1^\pm}{I_3} - \sqrt{c_2} \frac{\sin \varphi_2}{I_3}, \quad \Omega_2 = \pm \sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_2 - I_3}} \frac{\cosh \varphi_1^\pm}{I_3} - \sqrt{c_2} \frac{\cos \varphi_2}{I_3}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

знак \pm возникает вследствие того, что в каждом из этих двух случаев уравнение $C_1 = c_1$ определяет пару гипербол, одна из которых параметризуется переменной φ_1^+ , а другая — переменной φ_1^- .

Как видим, для анализа устойчивости неподвижных точек в данном случае достаточно в предыдущих формулах сделать замену:

$$\begin{aligned} \text{при } c_1 < 0: \varphi_1^\pm &= i\varphi_1, \text{ где } \varphi_1 \in (-\infty, \infty), \\ \text{при } c_1 > 0: \varphi_1^\pm &= \frac{\pi}{2} - i\varphi_1, \text{ где } \varphi_1 \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

При фиксированных параметрах области устойчивых и неустойчивых неподвижных точек приведены на рисунке 4.

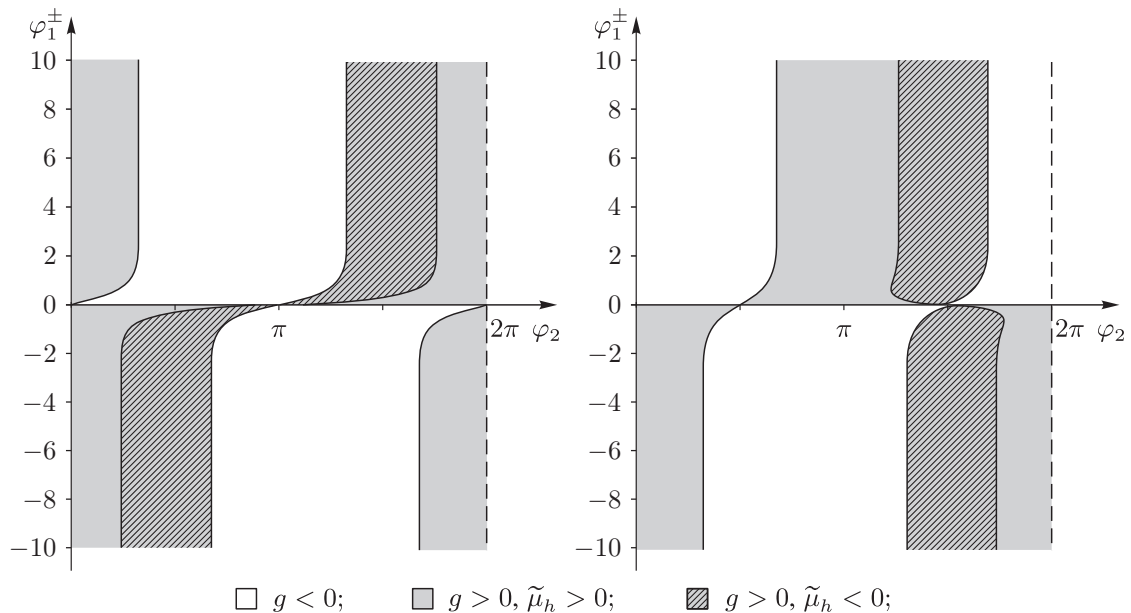


Рис. 4. Области устойчивых (выделены серым) и неустойчивых (заштрихованы) состояний равновесия: слева $c_1 < 0$, справа $c_1 > 0$ ($I_1 = 3.3$, $I_2 = 5.2$, $I_3 = 4$, $I_s = 3.6$). Каждой плоскости $(\varphi_1^\pm, \varphi_2)$ и (φ_1^-, φ_2) отвечают различные гиперболы.

5.2. Топологический анализ интегральных многообразий и классификация траекторий

В предыдущих разделах на поверхности уровня $\mathcal{M}_{c,h}$ было указано решение в квадратурах (4.6), (4.7) и исследовано множество неподвижных точек. В этом разделе, используя методы топологического анализа, исследуем, как устроено само многообразие $\mathcal{M}_{c,h}$, и изучим поведение траекторий на нем.

Прежде всего напомним некоторые определения и обозначения, следуя в основном работе [11]. Обозначим через $\Phi = (C_1, C_2, H): \mathcal{M}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ интегральное отображение системы (2.5):

$$z \mapsto \Phi(z) = (C_1(z), C_2(z), H(z)) \in \mathbb{R}^3.$$

Область возможных движений (ОВД) $\Phi(\mathcal{M}^5)$ — полный образ фазового пространства в пространстве первых интегралов. Всякой точке $(c_1, c_2, h) \in \Phi(\mathcal{M}^5)$ соответствует интегральное многообразие системы $\mathcal{M}_{c,h}$, которое, вообще говоря, может содержать несколько связных компонент.

Множество критических точек интегрального отображения в данном случае определяется как

$$S = \{z \in \mathcal{M}^5 \mid \text{rank } d\Phi(z) < 3\}.$$

Образ соответствующего множества в пространстве первых интегралов будем обозначать аналогичным образом:

$$\Sigma = \Phi(S).$$

Бифуркационной диаграммой будем называть изображенную в пространстве первых интегралов область возможных движений $\Phi(\mathcal{M}^5)$ совместно с образом критического множества Σ .

Критическое множество. С помощью неопределенных множителей Лагранжа множество критических точек задается как решение системы уравнений

$$\lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial z} + 2\lambda_3(I_3 + I_s) \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (5.6)$$

где неизвестными являются z и отношения неопределенных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Систему (5.6) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 I_3^2 + \lambda_3 I_s & -\lambda_2 I_1 I_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 I_1 I_3 & (\lambda_1 + \lambda_2) I_1^2 + \lambda_3 I_1 - \lambda_1 I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 I_3^2 + \lambda_3 I_s & -\lambda_2 I_2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 I_2 I_3 & (\lambda_1 + \lambda_2) I_2^2 + \lambda_3 I_2 - \lambda_2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3(I_3 + I_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \omega_1 \\ \Omega_2 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Как известно, условием существования нетривиального решения такой системы является обращение в нуль детерминанта соответствующей матрицы коэффициентов, что можно представить в виде

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 0, \quad (5.8)$$

$$\Lambda_i = (\lambda_1(I_i - I_3) + \lambda_3)(\lambda_2 I_3^2 + \lambda_3 I_s) + \lambda_2 \lambda_3 I_i I_s, \quad i = 1, 2.$$

В зависимости от количества множителей, обращающихся в нуль в этом выражении, получим следующие возможные решения исходной системы.

1. *Случай* $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. (В этом случае все три множителя в (5.8) обращаются в нуль.) Решения системы (5.7) образуют трехпараметрическое частное семейство, которое определяется соотношениями

$$S_1 = \left\{ \Omega_1 = \frac{I_1}{I_3} \omega_1, \quad \Omega_2 = \frac{I_2}{I_3} \omega_2 \right\}.$$

В данном случае $C_2 = 0$, $dC_2 = 0$.

2. *Случай* $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_1 \neq 0$. (Все три множителя в (5.8) также обращаются в нуль.) Трехпараметрическое семейство решений определяется соотношениями

$$S_2 = \{\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0\}.$$

При этом $C_1 = 0$, $dC_1 = 0$.

3. *Случай* $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. При этом

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = I_3, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -I_3 \left(1 + \frac{I_3}{I_s} \right),$$

а решения системы (5.7) образуют двухпараметрическое семейство, задаваемое уравнениями

$$S_3 = \left\{ \Omega_1 = -\frac{I_1}{I_s} \omega_1, \quad \Omega_2 = -\frac{I_2}{I_s} \omega_2, \quad \omega_3 = 0 \right\}.$$

4. *Случай* $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Неопределенные множители в этом случае удовлетворяют соотношению

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = -\frac{(I_1 - I_3)(I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2})}{I_1 I_s + I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2}},$$

двухпараметрическое семейство решений (5.7) записывается в форме

$$S_4 = \left\{ \Omega_1 = \frac{I_1 I_3}{I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2}} \omega_1, \quad \Omega_2 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \right\},$$

где одним из параметров является отношение λ_3/λ_2 .

5. *Случай* $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_1 \lambda_3 \neq 0$. При этом

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = -\frac{(I_2 - I_3)(I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2})}{I_2 I_3 + I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2}},$$

а двухпараметрическое семейство решений (5.7) представляется в виде

$$S_5 = \left\{ \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{I_2 I_3}{I_3^2 + I_s^{\lambda_3/\lambda_2}} \omega_2, \quad \Omega_3 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 0 \right\},$$

где λ_3/λ_2 — также один из параметров.

6. Случай $\lambda_3 = 0$, $\Lambda_1 \Lambda_2 \neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, а решения системы (5.7) образуют однопараметрическое семейство, которое задается уравнениями

$$S_6 = \{\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для первых пяти случаев $\text{rank } d\Phi = 2$, а в последнем — $\text{rank } d\Phi = 1$.

Прежде чем приступить к описанию возможных бифуркационных диаграмм системы, всюду в дальнейшем (без ограничения общности) положим, что мы зафиксировали $I_2 < I_1$, при этом случаи $I_3 < I_2 < I_1$ и $I_2 < I_1 < I_3$ сводятся один к другому заменой функции $C_1(z)$ на $-C_1(z)$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся подробным анализом двух качественно различных случаев

$$I_3 < I_2 < I_1 \quad \text{и} \quad I_2 < I_3 < I_1.$$

Бифуркационная диаграмма и интегральные поверхности в случае $I_3 < I_2 < I_1$. Рассмотрим теперь в пространстве значений интегралов $\mathbb{R}^3 = \{(c_1, c_2, h)\}$ образы всех семейств критических точек S_i , $i = 1, \dots, 6$, найденных ранее.

Пользуясь параметрическим представлением, приведенным выше, можно показать, что образом первого семейства S_1 является часть координатной плоскости $c_2 = 0$, удовлетворяющая условиям

$$\Sigma_1 = \left\{ (c_1, 0, h) \mid c_1 \geq 0, \quad h \geq \frac{I_1 I_s + I_3^2}{2I_3^2(I_1 - I_3)(I_3 + I_s)} c_1 \right\}.$$

Аналогично для семейства S_2 получим часть координатной плоскости $c_1 = 0$:

$$\Sigma_2 = \left\{ (0, c_2, h) \mid c_2 \geq 0, \quad h \geq \frac{I_s}{2I_3^2(I_3 + I_s)} c_2 \right\}.$$

Образом семейства S_3 является часть плоскости $h = \frac{I_s c_2 - (I_3 + I_s) c_1}{2I_3(I_3 + I_s)^2}$, которая естественным образом может быть представлена в параметрической форме

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = \left\{ (c_1, c_2, h) \mid c_1 = I_1(I_1 - I_3)u + I_2(I_2 - I_3)v, \quad c_2 = \frac{(I_3 + I_s)^2}{I_s^2}(I_1^2 u + I_2^2 v), \right. \\ \left. h = \frac{I_1(I_1 + I_s)}{2I_s(I_3 + I_s)} u + \frac{I_2(I_2 + I_s)}{2I_s(I_3 + I_s)} v, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Семействам S_4 и S_5 в пространстве интегралов отвечают две конические поверхности

$$\begin{aligned} \Sigma_4 = \left\{ (c_1, c_2, h) \mid \left(\frac{2I_3^2(I_3 + I_s)}{I_s} h - \frac{(I_1 I_s + I_3^2)}{I_s(I_1 - I_3)} c_1 - c_2 \right)^2 = \frac{4I_1}{I_1 - I_3} c_1 c_2, \quad c_1, c_2, h > 0 \right\}, \\ \Sigma_5 = \left\{ (c_1, c_2, h) \mid \left(\frac{2I_3^2(I_3 + I_s)}{I_s} h - \frac{(I_2 I_s + I_3^2)}{I_s(I_2 - I_3)} c_1 - c_2 \right)^2 = \frac{4I_2}{I_2 - I_3} c_1 c_2, \quad c_1, c_2, h > 0 \right\}. \end{aligned}$$

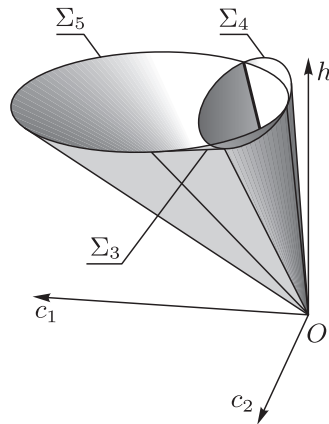


Рис. 5. Характерный вид бифуркационных поверхностей Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 в случае $I_3 < I_2 < I_1$ ($I_1 = 5.2$, $I_2 = 4.3$, $I_3 = 3.9$, $I_s = 3.6$).

Как видно из этих соотношений, обе поверхности касаются координатных плоскостей $\{c_1 = 0\}$ и $\{c_2 = 0\}$, причем плоскости $c_1 = 0$ они касаются вдоль одной общей прямой. Характерный вид бифуркационных поверхностей Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 в этом случае приведен на рисунке 5. Семейству S_6 соответствует вертикальный луч

$$\Sigma_6 = \{(c_1, c_2, h) \mid c_1 = c_2 = 0, h \geq 0\}.$$

Вследствие того, что множества Σ_i , $i = 1, \dots, 6$, являются инвариантными относительно гомотетии $c_1 \rightarrow \lambda c_1$, $c_2 \rightarrow \lambda c_2$, $h \rightarrow \lambda h$, все сечения бифуркационной диаграммы плоскостью $h = \text{const}$ (за исключением $h = 0$) являются подобными друг другу (такое подобие связано с тем, что при замене $z \rightarrow \sqrt{\lambda}z$, $z = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, траектории (2.5) переходят в себя). Поэтому далее вместо трехмерной диаграммы рассмотрим ее сечения плоскостью $h = \text{const}$. Соответствующее сечение приведено на рисунке 6.

Для того чтобы определить тип интегральной поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$ для каждой из областей на бифуркационной диаграмме, построим их проекции на тор, задаваемый угловыми переменными $(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ (см. рис. 6). Вследствие того, что

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \pm \sqrt{2h - \frac{2Q}{I_3^2(I_3 + I_s)}}, \\ Q &= \frac{I_s c_2}{2} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{I_s I_1 + I_3^2}{I_1 - I_3} \sin^2 \varphi_1 + \frac{I_s I_2 + I_3^2}{I_2 - I_3} \cos^2 \varphi_1 \right) - \\ &- I_s \sqrt{c_2} \left(\sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_1 - I_3}} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_2 - I_3}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

каждой точке внутри образа соответствует две точки интегральной поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$, а границе — одна точка. Это соображение легко позволяет определить тип интегральной поверхности. Как видно из рисунка 6, в приведенной системе встречается *три типа интегральных поверхностей*: тор \mathbb{T}^2 , сфера \mathbf{S}^2 и сфера с тремя ручками \mathcal{M}_3^2 (ориентируемая двумерная поверхность рода 3).

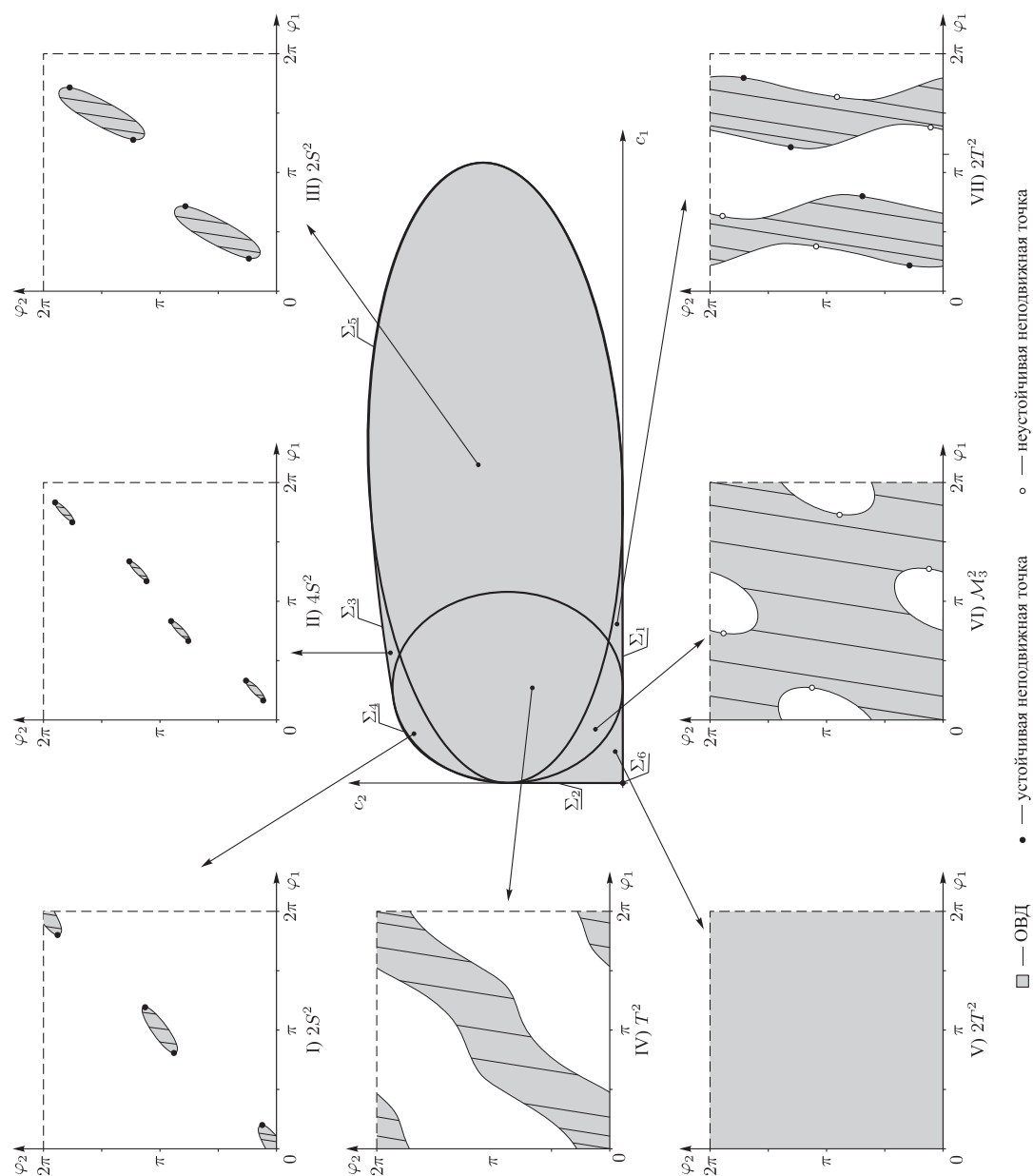


Рис. 6. Сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $h = \text{const}$ ($I_1 = 4.3$, $I_2 = 5.2$, $I_3 = 3.9$, $I_s = 3.6$, $k = \sqrt{\frac{0.52}{21.84}} \approx 0.1525$), типы интегральных поверхностей и траектории на них.

КОММЕНТАРИЙ. В данном случае большинство перестроек интегральных многообразий при пересечении бифуркационных кривых легко понять, пользуясь их проекциями на плоскости (φ_1, φ_2) (см. рис. 6). Прокомментируем лишь бифуркации, происходящие при пересечении кривых Σ_1, Σ_2 . Так, при приближении к Σ_2 величина $c_1 \rightarrow 0$ и, как следует из (3.1), эллипс на плоскости (ω_1, ω_2) сжимается в точку, при этом каждый тор из области V сжимается в окружность и затем исчезает. Аналогичная бифуркация происходит при пересечении Σ_1 .

Классификация траекторий при $I_3 < I_2 < I_1$. Перейдем теперь к определению возможных типов траекторий. Как мы видели выше (см. раздел 4), при проекции на тор $(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ траектории системы задаются прямыми

$$\varphi_1 = k\varphi_2 + c_3, \quad c_3 = \text{const}, \quad k^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2}.$$

Поскольку k не зависит от констант первых интегралов, для всех типов интегральных многообразий $\mathcal{M}_{c,h}^2$ проекции траектории на тор (φ_1, φ_2) одни и те же.

Выделим среди интегрируемых многообразий $\mathcal{M}_{c,h}^2$ торы, которые проецируются на весь квадрат (точнее, тор) $\{(\varphi_1, \varphi_2) \mid 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi\}$, и обозначим их как \mathbb{T}_∞^2 .

Предложение 3. Если $k \in \mathbb{Q}$ (рациональное), то все неособые (то есть не содержащие в своем замыкании положений равновесия) траектории являются замкнутыми; если $k \notin \mathbb{Q}$ (иррациональное), то

- траектории замкнуты для всех типов интегральных поверхностей $\mathcal{M}_{c,h}^2$, отличных от торов \mathbb{T}_∞^2 ,
- на торах \mathbb{T}_∞^2 в этом случае траектории представляют собой квазипериодические обмотки.

Доказательство. Первое и последнее утверждение в данном случае очевидны, поэтому остановимся подробнее на ситуации, когда k иррациональное и связная компонента $\mathcal{M}_{c,h}^2$ не является тором. Рассмотрим поведение траектории системы, проекция которой достигает некоторой точки на границе проекции $\mathcal{M}_{c,h}^2$. При этом, согласно (5.9), в фазовом пространстве на данной орбите меняется знак ω_3 , а на проекции точка движется по той же траектории, но в обратном направлении. Поскольку k иррационально, то рано или поздно проекция достигнет границы $\mathcal{M}_{c,h}^2$ ровно в двух точках, а значит, мы получим периодическое решение. ■

Бифуркационная диаграмма и интегральные поверхности в случае $I_2 < I_3 < I_1$. В этом случае образы семейств критических точек совпадают с найденными ранее, за исключением семейства Σ_1 :

$$\Sigma_1 = \left\{ (c_1, 0, h) \mid \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_s + I_3^2} h \leq \frac{c_1}{2I_3^2(I_3 + I_s)} \leq \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_s + I_3^2} h \right\}.$$

Характерный вид бифуркационных поверхностей $\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ для рассматриваемого случая приведен на рисунке 7.

Как и в предыдущем случае, все сечения бифуркационной диаграммы плоскостью $h = \text{const}$ являются подобными друг другу, поэтому далее рассмотрим сечение трехмерной диаграммы плоскостью $h = \text{const}$, характерный вид которого приведен на рисунке 10.

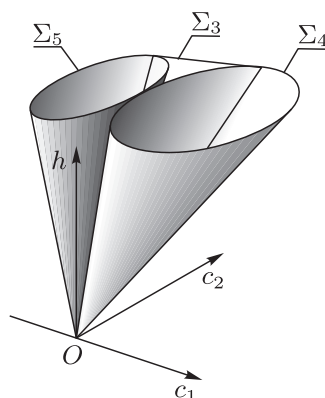


Рис. 7. Характерный вид бифуркационных поверхностей Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 в случае $I_2 < I_3 < I_1$ ($I_1 = 5.2$, $I_2 = 3.3$, $I_3 = 4$, $I_s = 3.6$).

Как и ранее, чтобы определить тип интегральной поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$, для каждой из областей на бифуркационной диаграмме построим ее проекцию. Основное отличие состоит в том, что в этом случае φ_1^\pm не является угловой переменной (см. раздел 4).

Вследствие того, что

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \pm \sqrt{2h - \frac{2Q}{I_3^2(I_3 + I_s)}}, \\ Q &= \frac{I_s c_2}{2} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{I_s I_1 + I_3^2}{I_1 - I_3} \cosh^2 \varphi_1^\pm - \frac{I_s I_2 + I_3^2}{I_2 - I_3} \sinh^2 \varphi_1^\pm \right) - \\ &- I_s \sqrt{c_2} \left(\sqrt{\frac{I_1 c_1}{I_1 - I_3}} \cosh \varphi_1^\pm \sin \varphi_2 + \sqrt{\frac{I_2 c_1}{I_3 - I_2}} \sinh \varphi_1^\pm \cos \varphi_2 \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

каждой точке внутри образа соответствует две точки интегральной поверхности $\mathcal{M}_{c,h}$, а границе — одна точка. Как видно из рисунка 10, в приведенной системе встречается *два типа интегральных поверхностей*: тор \mathbb{T}^2 и сфера \mathbb{S}^2 .

КОММЕНТАРИЙ. Объясним подробнее, почему в данном случае бифуркационную кривую Σ_2 описывает не весь отрезок прямой $c_1 = 0$, расположенный внутри ОВД, а лишь его часть от начала координат до точки касания эллипсов Σ_4 и Σ_5 .

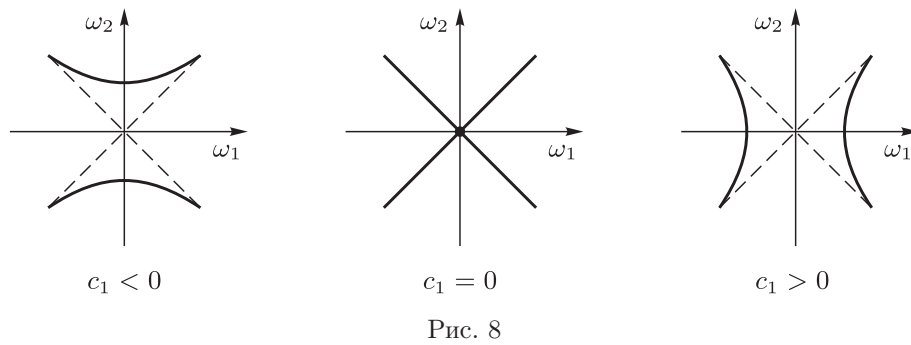
В данном случае интеграл C_1 задает на плоскости (ω_1, ω_2) семейство кривых вида

$$I_1(I_1 - I_3)\omega_1^2 - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2 = c_1.$$

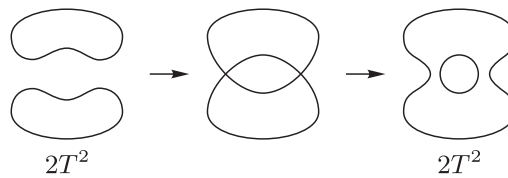
При $c_1 \neq 0$ это соотношение определяет пару гипербол, а при $c_1 = 0$ — пару пересекающихся прямых (и при этом параметризация (5.5) не работает). Деформация кривых при смене знака c_1 показана на рисунке 8.

Если смена знака c_1 происходит в области I на бифуркационной диаграмме (т.е. выше точки касания кривых Σ_4 и Σ_5 ; см. рис. 10), то интегральные многообразия, которые всегда расположены вдали от начала координат $\omega_1 = \omega_2 = 0$, деформируются при смене знака без перестроек.

Если же мы пересекаем прямую $c_1 = 0$ по направлению из области IV в область V (или наоборот), то, как видно на рисунке 10, проекция интегрального многообразия на плоскости (ω_1, ω_2) проходит через начало координат. При этом само интегральное многообразие,



состоящее из пары торов, перестраивается в другую пару торов, проходя через сингулярное многообразие с парой критических окружностей. Аналогичная бифуркация торов в трехмерном пространстве условно показана на рисунке 9, где данные кривые надо умножить на S^1 , чтобы получить двумерные поверхности.



Классификация траекторий при $I_2 < I_3 < I_1$. Перейдем теперь к определению возможных типов траекторий. Как мы видели выше (см. раздел 4), траектории системы задаются прямыми

$$\varphi_1^\pm = k\varphi_2 + c_3, \quad c_3 = \text{const}, \quad k^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}. \quad (5.11)$$

Предложение 4. В данном случае все неособые траектории системы являются замкнутыми.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство замкнутости в предложении 3, поэтому мы его опускаем.

6. Абсолютная динамика²

6.1. Общие уравнения для ориентации тела и оболочки

Рассмотрим теперь задачу об описании ориентации внутреннего тела и оболочки. Для этого определим три системы координат:

- инерциальную систему координат $Sxyz$, в которой центр масс неподвижен,
- подвижную систему координат $Sx_1x_2x_3$, жестко связанную с внутренним телом,
- подвижную систему координат $SX_1X_2X_3$, жестко связанную с оболочкой.

²Как уже отмечалось выше (см. раздел 2), термин *абсолютная динамика* употребляется исключительно для краткости и не связан с существованием какой-либо абсолютной системы координат.

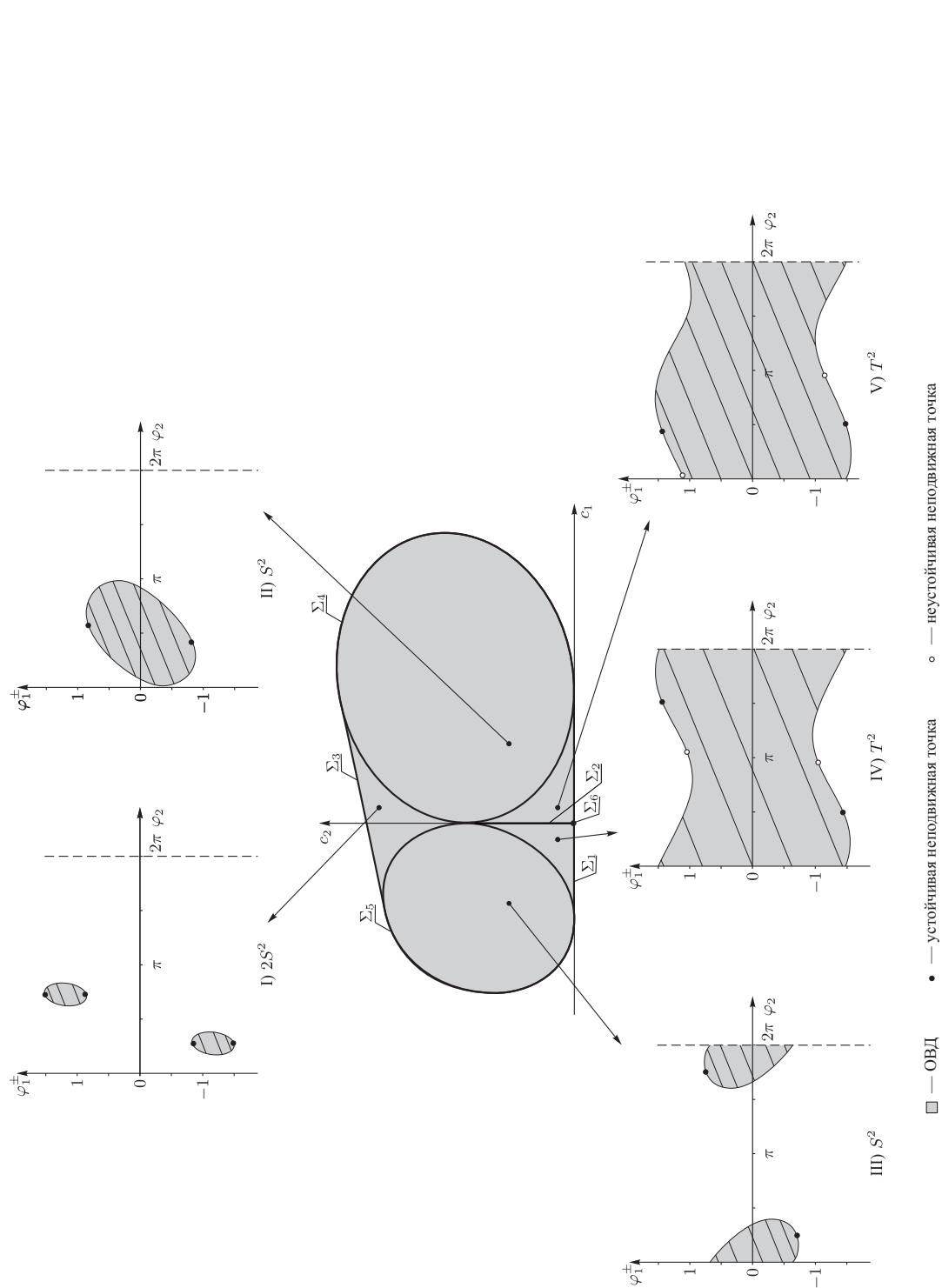


Рис. 10. Сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $h = \text{const}$ ($I_1 = 5.2$, $I_2 = 3.3$, $I_3 = 4$, $I_s = 3.6$, $k = \sqrt{\frac{0.84}{17.16}} \approx 0.2212$), типы интегральных поверхностей и траектории на них.

Поскольку выше угловые скорости тел записывались в подвижных осях $Cx_1x_2x_3$, то в качестве матриц поворота, характеризующих конфигурацию системы, выберем

- $\mathbf{Q} \in SO(3)$ — матрица поворота неподвижных осей относительно внутреннего тела, в которой по столбцам записаны проекции неподвижных ортов на оси $Cx_1x_2x_3$,
- $\mathbf{S} \in SO(3)$ — матрица поворота оболочки относительно внутреннего тела, по столбцам которой записаны проекции ортов, связанных с оболочкой на оси $Cx_1x_2x_3$.

Если координаты произвольного вектора в каждой из вышеперечисленных систем обозначить как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= (x, y, z) \text{ в системе } Cxyz, \\ \mathbf{r} &= (x_1, x_2, x_3) \text{ в системе } Cx_1x_2x_3, \\ \mathbf{R} &= (X_1, X_2, X_3) \text{ в системе } CX_1X_2X_3, \end{aligned}$$

то выполняется очевидное матричное соотношение

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}\mathbf{R}.$$

Эволюция матриц \mathbf{Q} , \mathbf{S} описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \tilde{\omega}\mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{S}} = (\tilde{\omega} - \tilde{\Omega})\mathbf{S}, \\ \tilde{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где ω_i , Ω_i — проекции на оси $Ox_1x_2x_3$ абсолютных угловых скоростей тела и оболочки.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если через α , β , γ обозначить столбцы матрицы \mathbf{Q} , то в векторном виде матричное уравнение для \mathbf{Q} представится в форме хорошо известных уравнений Пуассона

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega.$$

Таким образом, если известны $\omega(t)$ и $\Omega(t)$, то для описания конфигурации системы необходимо проинтегрировать уравнения (6.1). Мы не будем анализировать эти уравнения в общем случае, а рассмотрим лишь задачу о том, какое движение совершает тело и оболочка, когда угловые скорости ω , Ω задают неподвижные точки системы (2.5).

6.2. Абсолютное движение тел при постоянных ω , Ω

Для упрощения вычислений воспользуемся произволом в выборе как неподвижных осей $Oxyz$, так и осей, жестко связанных с оболочкой $OX_1X_2X_3$ (последний произвол продиктован сферической симметрией оболочки). Во-первых, заметим, что эволюция углового момента $\mathbf{M} = I_s\Omega + \mathbf{I}\omega$ описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \omega.$$

Отсюда следует, что вектор момента остается постоянным в неподвижных осях. Пользуясь этим, выберем

$$Cz \parallel \mathbf{M}, \quad Cx \perp \mathbf{M}, \quad Cy \perp \mathbf{M}.$$

Так как для неподвижных точек системы (2.5) все проекции ω_i , Ω_i остаются постоянными, первое матричное уравнение в (6.1) может быть проинтегрировано, откуда находим

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\nu_1} \sin(\nu_1 t + \theta) & -\frac{\omega_2}{\nu_1} \cos(\nu_1 t + \theta) & \frac{\omega_1}{\nu_1} \\ -\frac{\omega_1}{\nu_1} \sin(\nu_1 t + \theta) & \frac{\omega_1}{\nu_1} \cos(\nu_1 t + \theta) & \frac{\omega_2}{\nu_1} \\ -\cos(\nu_1 t + \theta) & -\sin(\nu_1 t + \theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

где $\nu_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $\theta = \text{const}$.

Аналогично можно проинтегрировать уравнение для \mathbf{S} : чтобы получить матрицу \mathbf{S} в наиболее простом виде, выберем систему координат $CX_1X_2X_3$, связанную с оболочкой так, чтобы в начальный момент времени она совпала с $Cx_1x_2x_3$. Окончательно получим

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{(\Omega_2 - \omega_2)^2}{\nu_2^2} \cos(\nu_2 t) + \frac{(\Omega_1 - \omega_1)^2}{\nu_2^2} & \frac{(\Omega_1 - \omega_1)(\Omega_2 - \omega_2)}{\nu_2^2} (1 - \cos(\nu_2 t)) & \frac{\Omega_2 - \omega_2}{\nu_2} \sin(\nu_2 t) \\ \frac{(\Omega_1 - \omega_1)(\Omega_2 - \omega_2)}{\nu_2^2} (1 - \cos(\nu_2 t)) & \frac{(\Omega_1 - \omega_1)^2}{\nu_2^2} \cos(\nu_2 t) + \frac{(\Omega_2 - \omega_2)^2}{\nu_2^2} & -\frac{\Omega_1 - \omega_1}{\nu_2} \sin(\nu_2 t) \\ -\frac{\Omega_2 - \omega_2}{\nu_2} \sin(\nu_2 t) & \frac{\Omega_1 - \omega_1}{\nu_2} \sin(\nu_2 t) & \cos(\nu_2 t) \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где $\nu_2 = \sqrt{(\Omega_1 - \omega_1)^2 + (\Omega_2 - \omega_2)^2}$.

Таким образом, при постоянных ω , Ω система совершает 2-периодическое движение, то есть в фазовом пространстве неособые траектории представляют собой периодические (при $\nu_1/\nu_2 \in \mathbb{Q}$) и квазипериодические (при $\nu_1/\nu_2 \notin \mathbb{Q}$) обмотки двумерных торов.

Приложение.

Устойчивость положений равновесия в гамильтоновых системах с пуассоновой структурой ранга два

Пусть \mathbf{J} — пуассонова структура ранга 2 и H — некоторый гамильтониан. Как в этом случае проверить устойчивость положения равновесия на симплектическом листе и в целом на пуассоновом многообразии?

Отметим, что пуассонова структура ранга 2 локально в окрестности регулярной точки может быть представлена в виде $\xi \wedge \eta$, где ξ и η — некоторые векторные поля. Иногда такое представление можно задать глобально (тогда пуассонова структура называется разложимой (см. [16])). Но даже если глобального представления не существует, то локально его найти несложно. Отметим, что для того, чтобы разложимый бивектор $\xi \wedge \eta$ задавал пуассонову структуру, необходимо и достаточно, чтобы (в регулярных точках) выполнялось условие $[\xi, \eta] = f\xi + g\eta$ для некоторых функций f и g .

Если такое разложение пуассоновой структуры задано, то вопрос об устойчивости решается при помощи вычисления гессиана функции H , ограниченной на симплектический лист. Следующее утверждение показывает, как это можно сделать, не вычисляя функций Казимира C_1, \dots, C_k и не делая такого ограничения $H|_{M_c}$ явно (здесь $M_c = \{C_i = c_i, i = 1, 2, \dots, k\}$).

Теорема 2. Пусть x_0 — положение равновесия гамильтоновой системы $\dot{x} = J dH(x)$ и

$$\mu_H(x_0) = \begin{vmatrix} \xi(\xi(H)) & \xi(\eta(H)) \\ \xi(\eta(H)) & \eta(\eta(H)) \end{vmatrix},$$

где $\xi(H)$ — производная H вдоль векторного поля ξ (значение детерминанта берется в точке x_0). Тогда

1. если $\mu_h(x_0) > 0$, то x_0 — устойчивое положение равновесия,
2. если $\mu_h(x_0) < 0$, то x_0 — неустойчивое положение равновесия.

Доказательство. В окрестности точки x_0 рассмотрим локальную систему координат $x_1, x_2, C_1, \dots, C_k$, где C_1, \dots, C_k — функции Казимира, а x_1 и x_2 рассматриваются как локальные координаты на симплектическом листе M_c , причем такие, что в точке x_0 мы имеем $\partial_{x_1} = \xi$, $\partial_{x_2} = \eta$ (ясно, что в одной выделенной точке мы всегда можем добиться выполнения этого условия, сделав при необходимости линейную замену переменных).

Поскольку ранг J равен двум, то мы можем рассматривать нашу гамильтонову систему как систему с одной степенью свободы, для которой казимиры C_1, \dots, C_k играют роль параметров. Тот факт, что x_0 — положение равновесия, означает, что $\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$. Устойчивость положения равновесия (как на отдельном симплектическом листе, так и в целом на пуассоновом многообразии) гарантируется хорошо известным неравенством

$$\det d^2 H(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0.$$

И наоборот, неустойчивость гарантируется противоположным (строгим) неравенством. Поэтому нам достаточно просто проверить, что $\mu_H(x_0) = \det d^2 H(x_0)$.

Этот факт почти очевиден. Действительно, поскольку ξ и η касаются симплектических листов, имеем

$$\xi = \xi_1 \partial_{x_1} + \xi_2 \partial_{x_2}, \quad \eta = \eta_1 \partial_{x_1} + \eta_2 \partial_{x_2},$$

где ξ_i и η_i — некоторые гладкие функции, такие, что $\xi_1(x_0) = \eta_2(x_0) = 1$, $\xi_2(x_0) = \eta_1(x_0) = 0$. Отсюда прямым вычислением получаем

$$\xi(\xi(H)) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j + \left(\text{члены, содержащие } \frac{\partial H}{\partial x_1} \text{ и } \frac{\partial H}{\partial x_2} \right).$$

Поскольку в рассматриваемой точке $\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_0) = 0$, второй член исчезает.

Кроме того, в силу специального выбора нашей системы координат, мы имеем $\xi_1(x_0) = 1$, $\xi_2(x_0) = 0$, поэтому в итоге

$$\xi(\xi(H))|_{x_0} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}(x_0).$$

Аналогично, $\eta(\eta(H))|_{x_0} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}(x_0)$ и $\xi(\eta(H))|_{x_0} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)$. Другими словами, $\mu_H(x_0) = \det d^2 H(x_0)$, что и требовалось. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $\mu_h(x_0) = 0$, то вопрос об устойчивости требует дополнительного исследования.

Заключение

В заключение отметим некоторые вопросы, связанные с данной работой и требующие дополнительного исследования. Интересно было бы понять общность изученной процедуры интегрирования в неголономной механике, то есть найти новые физически интересные задачи, разрешимые по этой схеме. Заметим, что существуют скобки ранга 2 несколько другой природы — хаотические скобки Пуассона. Для них не существует ни одной функции Казимира, а система, которая на них определена, может обладать хаотическим поведением. Такого рода скобки возникают в хорошо известной задаче Суслова. Интересно было бы выяснить механизм конструирования таких скобок, а также привести дополнительные механически содержательные задачи, в которых они встречаются.

Список литературы

- [1] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 2, pp. 198–213. *См. также:* Бизяев И. А., Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика неголономных систем, состоящих из сферической оболочки с подвижным твердым телом внутри // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 547–566.
- [2] Bolsinov A. V., Taimanov I. A. Integrable geodesic flows with positive topological entropy // Invent. Math., 2000, vol. 140, no. 3, pp. 639–650.
- [3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Гамильтоновость и интегрируемость задачи Суслова // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 1, с. 127–142.
- [4] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение твердого тела по плоскости и сфере: Иерархия динамики // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 173–205.
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [7] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 200–219.
- [8] Butler L. Integrable geodesic flows with wild first integrals: The case of two-step nilmanifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems, 2003, vol. 23, no. 3, pp. 771–797.
- [9] Fuller F. B. The writhing number of a space curve // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1971, vol. 68, pp. 815–819.
- [10] Бизяев И. А., Козлов В. В. Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли – Пуассона и метод Ковалевской // Матем. сб., 2015, т. 206, № 12, с. 29–54.
- [11] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.



- [12] Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем: Задачи для исследования // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анал., 2012, т. 28, с. 119–191.
- [13] Болсинов А. В., Тайманов И. А. Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы: Сб. ст. (Тр. МИАН, т. 231.) Москва: Наука, 2000. С. 46–63.
- [14] Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1941, № 5, с. 301–327.
- [15] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики // ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 28–33.
- [16] Коняев А. Ю. Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2 // Матем. сб., 2014, т. 205, № 1, с. 47–66.
- [17] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.
- [18] Харламов А. П., Харламов М. П. Неголономный шарнир // НАН Украины. Механика твердого тела, 1995, № 27, с. 1–7.

Topology and bifurcations in nonholonomic mechanics

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Bolsinov², Alexey V. Borisov³, Ivan S. Mamaev⁴

^{1,3,4}Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

²School of Mathematics, Loughborough University

United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

¹bizaev_90@mail.ru, ²A.Bolsinov@lboro.ac.uk, ³borisov@rcd.ru, ⁴mamaev@rcd.ru

This paper develops topological methods for qualitative analysis of the behavior of nonholonomic dynamical systems. Their application is illustrated by considering a new integrable system of nonholonomic mechanics, called a nonholonomic hinge. Although this system is nonholonomic, it can be represented in Hamiltonian form with a Lie–Poisson bracket of rank 2. This Lie–Poisson bracket is used to perform stability analysis of fixed points. In addition, all possible types of integral manifolds are found and a classification of trajectories on them is presented.

MSC 2010: 70F25, 37J60, 37J05

Keywords: nonholonomic hinge, topology, bifurcation diagram, tensor invariants, Poisson bracket, stability

Received January 27, 2015, accepted April 29, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 735–762 (Russian)

